COMPOSITION DE MATHEMATIQUES

(temps accordé : 4 heures)

---

Nota : Les poids respectifs de l'exercice et du problème pour l'évaluation de l'épreuve seront 1 et 2.

## Exercice

Soit à résoudre le système $\Sigma$ à termes réels à $n$ inconnues et $n+1$ équations :

$$\Sigma \begin{cases} r_1 x_1 + a\,x_2 + a\,x_3 + \dots\dots + a\,x_n = a \\ b\,x_1 + r_2 x_2 + a\,x_3 + \dots\dots + a\,x_n = a \\ b\,x_1 + b\,x_2 + r_3 x_3 + \dots\dots + a\,x_n = a \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ b\,x_1 + b\,x_2 + \dots\dots + b\,x_{n-1} + r_n x_n = a \\ b\,x_1 + b\,x_2 + \dots\dots + b\,x_{n-1} + b\,x_n = r_{n+1} \end{cases}$$

Pour ce faire, il est intéressant de connaître la valeur $\Delta_n$ du déterminant de la matrice $n \times n$ dont les termes $a_{ij}$ sont les suivants :

$$\begin{aligned} a_{ij} &= r_i \quad \text{pour } i = j \\ a_{ij} &= a \quad \text{pour } i < j \\ a_{ij} &= b \quad \text{pour } i > j \end{aligned} \qquad \left.\begin{matrix} i \\ j \end{matrix}\right\} \in (1,2 \dots\dots n).$$

1°) Montrer que le déterminant $D_n$ de la matrice de termes $b_{ij} = a_{ij} + \lambda$ est une fonction affine de $\lambda$, soit $D_n = \Delta_n + B_n \lambda$.

2°) Calculer $\Delta_n$ et $B_n$ en utilisant la fonction

$$f_n(x) = (r_1 - x)(r_2 - x) \dots\dots (r_n - x)$$

dans le cas $a \neq b$.

3°) Donner la valeur de $\Delta_n$ lorsque $b = a$

4°) A quelles conditions le système $\Sigma$ a-t-il une solution unique ?

5°) Calculer dans ce cas la formule générale donnant $x_i$.

## - Problème -

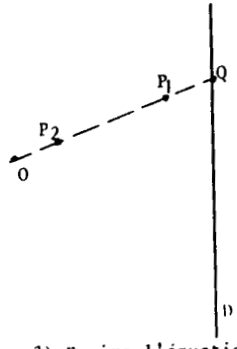
Nota : Les trois parties du problème sont indépendantes, sauf II,2 et III,2.

Le problème est entièrement défini dans un plan euclidien rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

### I

On étudie l'application suivante :

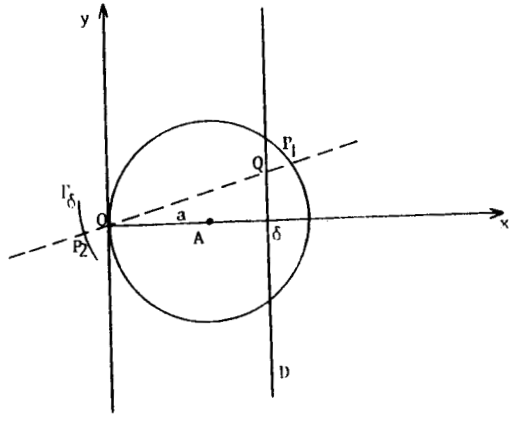
étant donnée une droite D, on fait correspondre à tout point $P_1$ le point $P_2$ tel que $OP_1$ coupant la droite D en Q, $\overrightarrow{OP_2} = \overrightarrow{P_1Q}$




1) Traduire l'application $P_1 \longmapsto P_2$ en coordonnées polaires avec, pour D, l'équation $\rho = \frac{\delta}{\cos\theta}$

2) Traduire l'application $P_1 \longmapsto P_2$ en coordonnées cartésiennes avec, pour D, l'équation $x = \delta$.

3) Ecrire l'équation polaire et l'équation cartésienne de la transformée $\Gamma_\delta$, dite cissoïde, du cercle $(C_a)$ de centre A (a,o) et de rayon a relativement à la droite D d'équation $x = \delta$.



II

On considère les courbes $\Gamma_\lambda$ définies par l'équation

$$(x^2+y^2)\ (x-\lambda) + 2cx^2 = 0$$

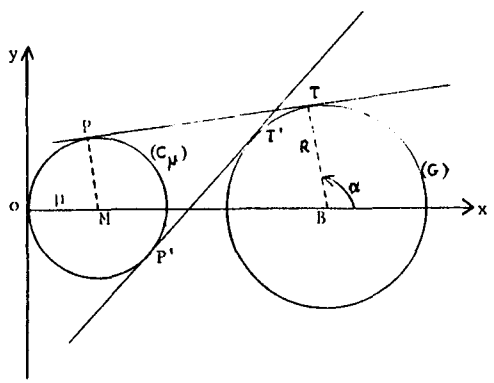
où c est une constante positive et $\lambda$ est un paramètre réel.

1) Etudier ces courbes et donner leur représentation graphique.
Montrer que chaque courbe s'inscrit entre deux parallèles à Oy.
Distinguer les diverses formes de $\Gamma_\lambda$ en fonction de $\lambda$.

2) Préciser les relations entre les courbes $\Gamma_\lambda$ et $\Gamma_\delta$ de I,3.
En tirer les conséquences pour leur construction.

3) Dire si l'aire comprise entre une courbe $\Gamma_\lambda$ et la droite $x = \lambda$ est finie.
Pour les courbes $\Gamma_\lambda$ qui présentent une boucle, calculer l'aire de cette boucle.

III




Soit un cercle fixe (G) de centre B(b,o) et de rayon R et un cercle $(C_\mu)$ de centre M(μ,o) et de rayon μ.
On mène les tangentes communes telles que PT (et P'T')
T étant sur (G) et P sur $(C_\mu)$.

Soit $\mathcal{E}$ l'ensemble des points P (et P') pour toutes valeurs de μ.

1°) Ecrire les équations qui définissent $\mathcal{E}$.
Pour cela, écrire l'équation d'une tangente à (G) en fonction de l'angle α de $\vec{BT}$ avec $\vec{i}$ puis la condition pour que P soit sur un cercle $(C_\mu)$.

2°) Montrer que les deux premières parties du problème permettent de préciser la représentation graphique de $\mathcal{E}$ et la tracer dans les divers cas de figure.

---

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes




Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail